Теоретический тур

Решения задач

Уважаемые коллеги! Просьба при оценивании не учитывать дважды переходящие ошибки. К примеру, участник мог неправильно рассчитать ответ в пункте а), но при этом решил правильно все остальные пункты. Однако для получения правильного ответа в остальных пунктах потребуется ответ, полученный вначале. И сделав ошибку в самом начале, участник олимпиады даст неправильные ответы и во всех остальных. В таком случае баллы снижаются только за пункт а). Приведенные баллы и схема оценивания – приблизительные, жюри может их менять по своему усмотрению. В случае возникновения вопросов по задачам обращайтесь по телефону +375 29 257 08 09.

1. **(14 баллов за задачу)**

а) (2 балла) Воспользуемся III законом Кеплера: $T = \sqrt{a^3} = \sqrt{3,50^3} = 6{,}55$ года.

б) (2 балла) Если бы перигелий метеорного потока находился внутри земной орбиты, то точек пересечения орбит было бы две (а если орбиты лежат в разных плоскостях, то скорее всего, их бы и вовсе не было). Две точки пересечения – значит, поток будет наблюдаться дважды в год. А иметь фокус, совпадающий с центром окружности и пересекаться с этой окружностью только в одной точке можно лишь в случае, если эта точка – перигелий или афелий. Раз большая полуось орбиты частиц больше, чем у Земли, то остается только перигелий.

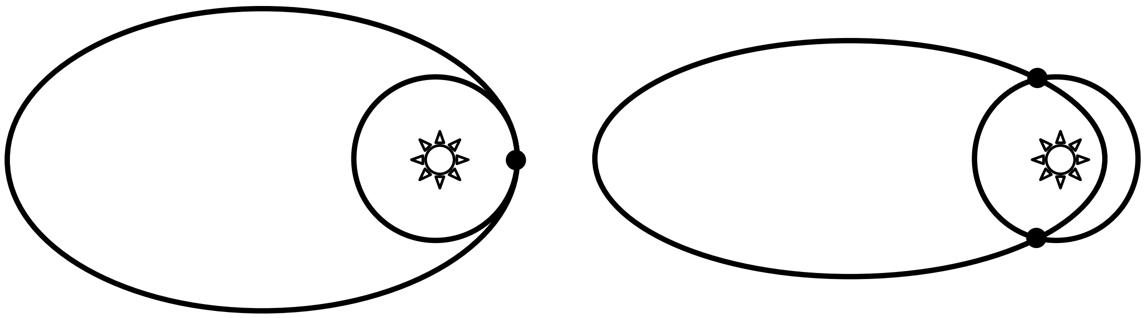

Рис. 1. *Если орбиты Земли и метеорного роя пересекаются в одной точке – это будет непременно перигелий (слева). В противном случае этих точек пересечения будет две (справа). Если орбиты будут лежать в разных плоскостях, то в первом случае по-прежнему будет одна точка пересечения, а во втором таких точек не будет вовсе.*

в) (2 балла) Раз мы знаем большую полуось (3,50 а. е.) и перигелийное расстояние (1 а. е.), то скорость получим по формуле:

$$v_{\text{отн}\odot} = \sqrt{GM_\odot\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} = 39{,}1\ \text{км/с}.$$

г) (6 баллов) Согласно условию задачи, метеоры попадают к нам прямо из точки, перпендикулярной плоскости земной орбиты. Однако это лишь направление движения частиц относительно Земли ($\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{отн}\oplus}$), их гелиоцентрическая скорость ($\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{отн}\odot}$) ориентирована иначе. Напишем, как меняется скорость при переходе из системы отсчета Солнца в систему отсчета Земли:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{отн}\odot} = \vec{\boldsymbol{v}}_{\text{отн}\oplus} + \vec{\boldsymbol{v}}_{\oplus}$$

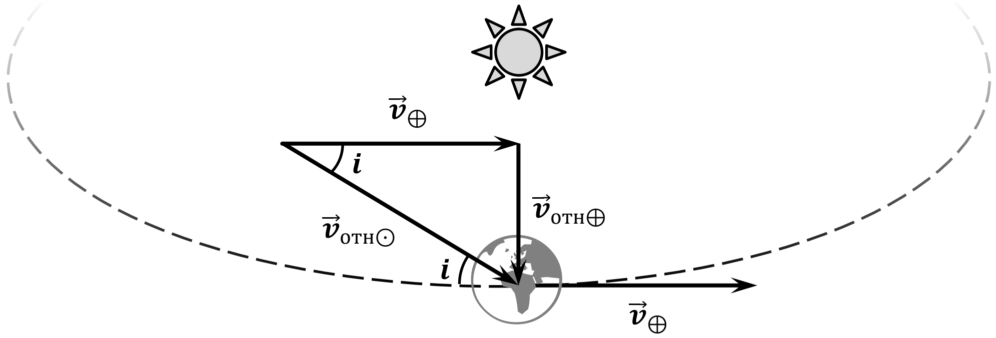

Рис. 2. *Орбита Земли и векторы гелиоцентрической и геоцентрической скоростей метеорных частиц.*

Тогда скорость относительно Земли получим по теореме Пифагора:

$$v_{\text{отн}\oplus} = \sqrt{v_{\text{отн}\odot}^2 - v_\oplus^2} = 25{,}2 \text{ км/с}.$$

Скорость Земли можно было найти, например, по формуле $v_\oplus = \sqrt{GM_\odot / a_\oplus} = 29{,}9$ км/с.

Однако не будем забывать, что еще Земля своим гравитационным полем ускорит частицы. Поэтому, чтобы найти скорость метеоров на высоте h (обозначим ее v_h), необходимо приравнять полную механическую энергию частиц на бесконечности и на этой высоте:

$$\frac{v_{\text{отн}\oplus}^2}{2} - 0 = \frac{v_h^2}{2} - \frac{GM_\oplus}{R_\oplus + h},$$

откуда $v_h = 27{,}5$ км/с. Как видим, поле гравитации Земли разгонит метеорные частицы более чем на 2 км/с.

д) (2 балла) Линия пересечения плоскостей орбит кометы и Земли проходит через Солнце и Землю, гелиоцентрическая скорость частиц перпендикулярна этой линии (т. к. это перигелий) и скорость Земли также перпендикулярна ей (орбита круговая). Следовательно, угол между $\vec{v}_{\text{отн}\odot}$ и $\vec{v}_\oplus$ и будет углом между плоскостями орбит.

Найдем этот угол (см. рис. 2):

$$i = \arccos \frac{v_\oplus}{v_{\text{отн}\odot}} = 40°.$$

Заметим, что этот угол должен быть именно острым, а не тупым, так как частицы движутся в ту же сторону, что и Земля.

2. (8 баллов за задачу)

а) (1 балл) Нижнее соединение.

б) (2 балла) Нижние соединения будут повторяться через синодический период. Найдем его:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_\text{В}} - \frac{1}{T_\oplus},$$

$$S = \frac{T_\text{В} T_\oplus}{T_\oplus - T_\text{В}} = 583{,}9^d.$$

в) (5 баллов) При каждом нижнем соединении Венера будет повернута одной и той же стороной не только к Земле, но и к Солнцу. За свой синодический период Венера пройдет по орбите угол, равный $360° \cdot \frac{583{,}9^d}{224{,}7^d} = 935{,}5°$. Это два полных оборота по $360°$ и еще поворот на $215{,}5°$. Если бы за синодический период и Венера повернулась на $215{,}5°$, то она была бы обращена к Солнцу и Земле той же стороной, что и во время предыдущего нижнего соединения. Правда, Венера обращается вокруг своей оси в противоположную сторону, поэтому для выполнения условия задачи ей за синодический период придется повернуться вокруг оси не на $218°$, а на $360° - 215{,}5° = 144{,}5°$. Либо на $144{,}5° + 360° = 504{,}5°$. Либо на $(144{,}5° + 360° \cdot n)$, т. е. на угол $144{,}5°$ плюс целое количество полных оборотов.
Тогда из пропорции период осевого вращения будет равен:

$$T = \frac{360°}{144{,}5° + 360° \cdot n} \cdot S.$$

Если участник олимпиады получил такую формулу, можно за этот пункт ставить полный балл. А мы на всякий случай приведем несколько численных ответов для разных n: 1454^d, 417^d, 243^d, 172^d, 133^d… Заметим, что вариант ответа 243^d и является в точности реальным периодом осевого вращения Венеры.

3. (7 баллов за задачу)

а) (2 балла) Поскольку Солнце светит равномерно по всем направлениям, то его яркость будет убывать обратно пропорционально квадрату расстояния. Следовательно, если «Вояджер-1» в 150 раз дальше от Солнца, чем Земля, то Солнце там светит слабее в $150^2 = 22{,}5$ тыс. раз.

б) (2 балла) Используя формулу Погсона, оценим во сколько раз полная Луна светит слабее Солнца:

$$\frac{E_\odot}{E_Л} = 10^{0{,}4(m_Л - m_\odot)} = 437\ 000.$$

Как видим, Луна светит на Земле куда слабее, чем Солнце освещает «Вояджер-1». А поскольку даже при Луне можно читать книгу, то на борту самого далекого от Солнца зонда – тем более.

в) (3 балла) Оценим параболическую скорость на расстоянии 150 а. е. от Солнца:

$$v_п = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{r}} = 3{,}4\ \text{км/с}.$$

Напомним, что нынешняя скорость аппарата составляет 17.0 км/с, что гораздо больше полученного значения. Следовательно, траектория будет гиперболой, а «Вояджер-1» никогда не вернется в Солнечную систему.

4. (14 баллов за задачу)

а) (2 балла) Если мы с Солнца видим ближайшую звезду в направлении созвездия Центавра, то оттуда Солнце будет видно в диаметрально противоположном направлении: его склонение будет иметь противоположный знак, а прямое восхождение будет отличаться на 12^h:

$$\alpha_\odot = 2^h40^m, \qquad \delta_\odot = +60°50'.$$

Это соответствует созвездию Кассиопеи, которое и украсит Солнце для «центаврян».

б) (2 балла) $m = M - 5 + 5\lg r = M - 5 - 5\lg \pi = 0{,}43^m$.

в) (5 баллов) Расстояние от Солнца до α Центавра равно $r_1 = 1/\pi_1 = 1{,}338$ пк, а до Проксимы оно составляет $r_2 = 1/\pi_2 = 1{,}301$ пк. Найдем теперь угловое расстояние между этими звездами при наблюдении с Солнца. Можно считать, что треугольник на небесной сфере, образованный дугой, соединяющей звезды, а также кругами склонения и суточными параллелями, проходящими через эти звезды, будет плоским. Тогда к нему можно применить теорему Пифагора, чтобы найти гипотенузу:

$$\rho = \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 \cos^2 \delta + (\delta_1 - \delta_2)^2} = 2{,}20°.$$

Наличие косинуса в формуле связано с тем, что длина суточных параллелей изменяется пропорционально $\cos\delta$. Угол $(\alpha_1 - \alpha_2)$ – это угол для наблюдателя, расположенного в центре суточной параллели, а мы же находимся в центре сферы, а не параллели. Участники могут воспользоваться и формулами сферической тригонометрии (если владеют ими) – ответ получится такой же.
Воспользуемся теперь теоремой косинусов, чтобы найти линейное расстояние между звездами:

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\rho} = 0{,}0631\ \text{пк}.$$

г) (2 балла) $m = M - 5 + 5\lg r = 4{,}53^m$. Если расстояние в предыдущем пункте посчитано неверно, однако с этим расстоянием здесь получен правильный ответ, то выставляется полный балл.

д) (3 балла) Ответ на данный вопрос несколько осложняется тем, что мы не знаем расстояние от α Центавра до Сириуса, а его расчет несколько выходит за рамки школьного курса астрономии. Однако, подозревая, что это довольно яркая звезда, давайте допустим, что при наблюдении с Солнца Сириус и α Центавра находятся в диаметрально противоположных направлениях. Тогда расстояние от α Центавра до Сириуса составит 3,98 пк. Найдем видимую звездную величину Сириуса при наблюдении с α Центавра:

$$m + 5 - 5\lg 3{,}98 = -1{,}46 + 5 - 5\lg 2{,}64,$$
$$m = -0{,}57^m.$$

В реальности все три звезды не лежат на одной линии, поэтому на самом деле Сириус будет даже ярче.

В пункте б) мы уже нашли видимую величину Солнца: $m_\odot = 0{,}43^m$. Таким образом, получаем в порядке убывания видимого блеска: Сириус, Солнце, Проксима.

Всего 43 балла за теоретический тур